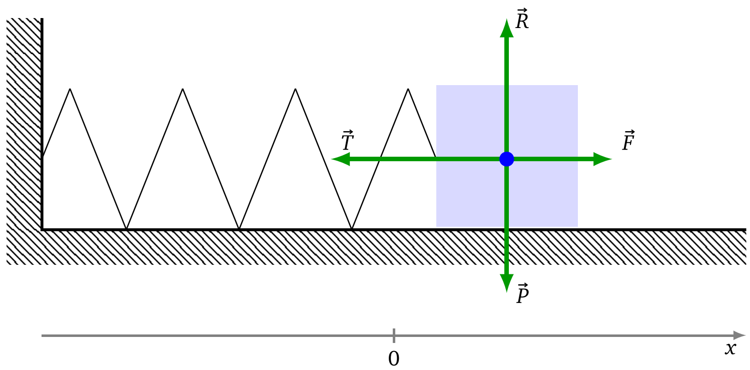
4.4. Masse attachée à un ressort

Une masse est attachée à un ressort. Quelles sont les forces qui s'appliquent à cette masse ?

- Un poids $\vec{P}$,
- une réaction $\vec{R} = -\vec{P}$ qui s'oppose au poids,
- une force de rappel $\vec{T}$,
- une force de frottement $\vec{F}$.



Principe fondamental de la mécanique

Le principe fondamental de la mécanique s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{F} = m\vec{a}$$

Il est à noter que la réaction s'opposant au poids, on a $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$, et l'équation devient :

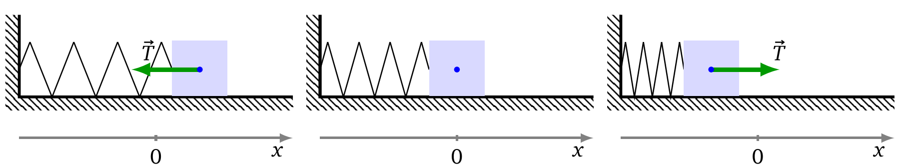
$$\vec{T} + \vec{F} = m\vec{a}$$

Force de rappel

La force de rappel est une force horizontale. Elle est nulle à la position d'équilibre, qui sera pour nous l'origine $x = 0$. Si on écarte davantage la masse du mur, la force de rappel est un vecteur horizontal qui pointe vers la position d'équilibre (vers la gauche sur le dessin). Si on rapproche la masse du mur, le ressort se comprime, et la force de rappel est un vecteur horizontal qui pointe encore vers la position d'équilibre (cette fois vers la droite sur le dessin). On modélise la force de rappel par

$$\vec{T} = -kx\vec{i}$$

où x est la position de la masse (on peut avoir $x \geqslant 0$ ou $x \leqslant 0$), et $k > 0$ est une constante qui dépend du ressort.



Oscillations sans frottements

Dans un premier temps, on suppose qu'il n'y a pas de frottement : $\vec{F} = \vec{0}$.
Le principe fondamental de la mécanique, considéré uniquement sur l'axe horizontal, s'écrit alors :

$$-kx(t) = m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

Il s'agit donc de résoudre l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0$$

L'équation caractéristique est $r^2 + \frac{k}{m} = 0$, dont les solutions sont les nombres complexes $r_1 = +\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}$ et $r_2 = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Nous sommes dans le cas $\Delta = -4\frac{k}{m} < 0$. Les solutions de cette équation caractéristique sont de la forme $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$ avec

$\alpha = 0$, $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$, ce qui fait que les solutions de l'équation différentielle sont les :

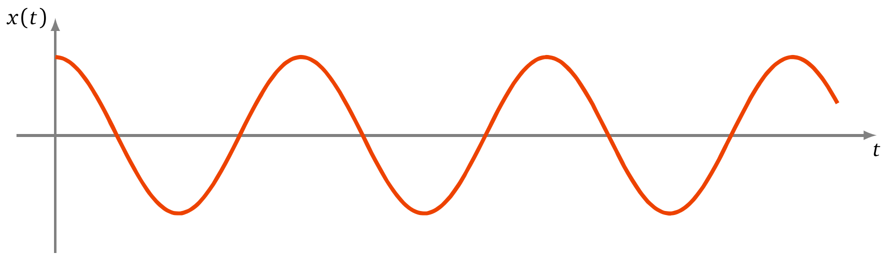
$$y(x) = e^{\alpha x}\big(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\big)$$

Dans notre situation (la fonction inconnue est x et la variable t) :

$$x(t) = \lambda \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \mu \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Exemple 15.
On lâche la masse au point d'abscisse 1, sans vitesse initiale. Cela nous donne les conditions initiales $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$. Comme $x(0) = 1$ alors $\lambda = 1$. Comme $x'(0) = 0$ alors $\mu = 0$. Ainsi on trouve une solution périodique :

$$x(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$



Oscillations avec faibles frottements

On rajoute une force de frottement $\vec{F} = -fm\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ qui est proportionnelle à la vitesse et s'oppose au déplacement (f est le coefficient de frottement). Le principe fondamental de la mécanique devient :

$$-kx(t) - fm\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

Il s'agit donc de résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + fy' + \frac{k}{m}y = 0$$

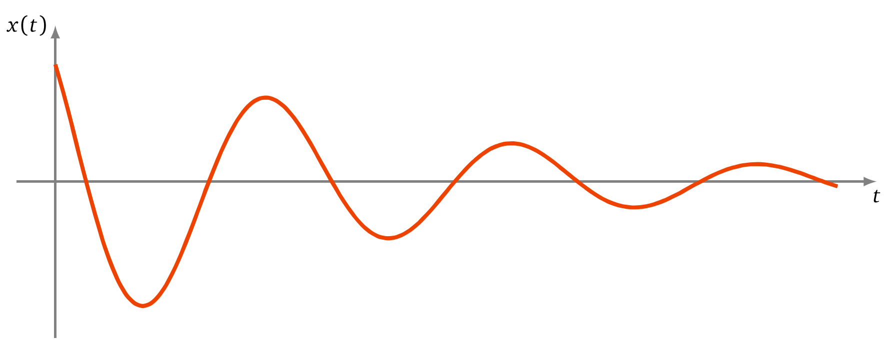
L'équation caractéristique est cette fois $r^2 + fr + \frac{k}{m} = 0$. Son discriminant est $\Delta = f^2 - 4\frac{k}{m}$. Supposons que le coefficient de frottement f soit faible, c'est-à-dire que $\Delta = f^2 - 4\frac{k}{m} < 0$, comme dans le cas sans frottement. On note $\delta = \sqrt{|\Delta|} = \sqrt{4\frac{k}{m} - f^2}$. Les deux solutions sont $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ avec $\alpha = -\frac{f}{2}$ et $\beta = \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{f^2}{4}}$. Les solutions de l'équation différentielle sont encore de la forme :

$$y(x) = e^{\alpha x}\big(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\big)$$

Ce qui donne ici :

$$x(t) = e^{-\frac{f}{2}t}\left(\lambda \cos\left(\frac{\delta}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\delta}{2}t\right)\right) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Cette fois la solution n'est plus périodique, mais correspond à un mouvement oscillant amorti, qui tend vers la position d'équilibre $x = 0$.



Mini-exercices.

1. Un circuit électrique constitué d'un condensateur de capacité C se décharge dans une résistance R. Calculer l'évolution de la charge électrique qui vérifie $q(t) = -RC\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$.
2. Calculer et tracer les solutions du système masse-ressort pour différents niveaux de frottements.